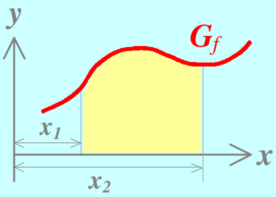
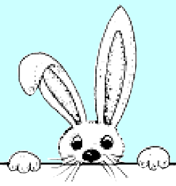
OMA 2006




Wenn die Fläche, die gelb hier kreiert,
um die $x$-Achse rundum rotiert,
gibt die Formel genau
dir die Maßzahl von $V$ –
über $f$ Quadrat wird integriert.

Formel Eins :

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx$$



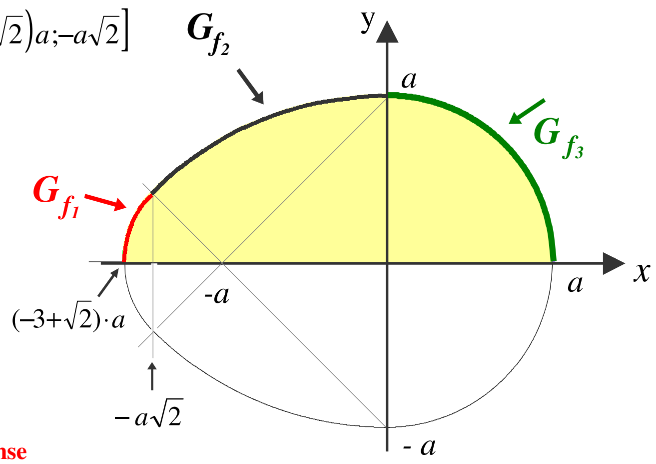
$$f_1(x)=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)^2a^2-(x+a)^2}\quad \text{für } x\in\left[\left(-3+\sqrt{2}\right)a;-a\sqrt{2}\right]$$

$$f_2(x)=\sqrt{4a^2-x^2}-a\quad \text{für } x\in\left[-a\sqrt{2};0\right]$$

$$f_3(x)=\sqrt{a^2-x^2}\quad \text{für } x\in[0;a]$$

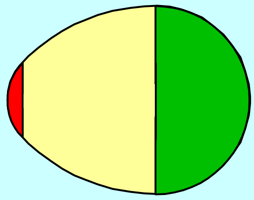
Endlich Feiertag, Muße, Hurra!
Jetzt ist Zeit für ’ne Mathe-Nuss da.
Rechne aus nun mit Fleiß
das Volumen des Ei’s *
nur in Abhängigkeit von „klein $a$ “ !

***Rotationskörper der gelb gefärben Fläche um die x-Achse**




Erste Hilfe

Unterteile den Eikörper bitte
senkrecht zweimal mit sauberem Schnitte
in drei Raumelemente,
zwei sind Kugelsegmente –
(Formel Eins brauchst du nur für die Mitte).



Formel Drei: $V_3=\frac{2}{3}r^3\pi$

Dritte Hilfe r = $a$

Rechts das Teilstück errechnet man leicht;
Formel Drei ist es, die hier schon reicht,
denn es handelt sich nur
um ‘ne **Halbkugel** pur –
keine Stirn wird von Rechenschweiß feucht!

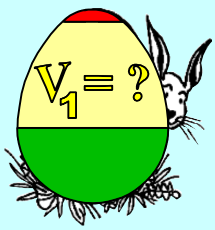
$r=a\left(2-\sqrt{2}\right)$ Zweite Hilfe $h=a\left(3-2\sqrt{2}\right)$

Wenn man links für das **Kugelsegment**
außerm Radius die Höhe noch kennt,
bringt geschwind Formel Zwei
das Ergebnis herbei –
mal vorausgesetzt, dass man nicht pennt!

Formel Zwei:

$$V_2=\frac{h^2\pi}{3}(3r-h)$$

Letzte Hilfe




Diese Rechnerei ist eine Qual ?
Nun, ein Neuanfang hilft allemal !
Nimm dir einfach mal frei,
rechne fertig das Ei –
für $f_2$ brauchst du’n Kreisintegral ! $\longrightarrow$

$$V_1=\pi\int_{-2a}^{0}\left(5a^2-x^2-2a\sqrt{4a^2-x^2}\right)dx$$

$$\int\sqrt{4a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}+2a\ \arcsin\frac{x}{2a}+C$$

$$V_{gesamt}=\frac{a^3\pi}{3}\left(75-53\sqrt{2}+13\sqrt{2}-6-3\pi+2\right)$$

$$V=\frac{a^3\pi}{3}\left(71-40\sqrt{2}-3\pi\right)$$

Des Rätsels Lösung!


Buntes Osterei – listig versteckt –
und kein Mensch hat es deshalb entdeckt;
doch es wurde indessen
recht genüsslich gefressen –
weil auch Mäusen was Süßes gut schmeckt.

**Stell dir vor, dieses Osterei wär**
**mit zwei Gramm* Aprikosenlikör**
**schokoladenumhüllt***
**zu 'nem Viertel gefüllt.**
**Sag! Wie groß wär dann $a$ bitte sehr?**

*** 0,2 cl = 2 cm³** *** Wanddicke 2 mm**

$$a=\sqrt[3]{\frac{3\cdot4\cdot2\,cm^3}{\pi\left(71-40\sqrt{2}-3\pi\right)}}+0{,}2\,cm\approx1{,}35\,cm$$

$$Breite:\quad 2\cdot(a+0{,}05)cm\approx2{,}8\,cm$$

$$Höhe:\quad 2{,}8\,cm+a\left(2-\sqrt{2}\right)cm\approx3{,}6\,cm$$

Wickelst du dieses Ei nun noch fein
in Gedanken in Buntpapier ein,
schillernd glänzend und schick,
solche Schicht ist nicht dick* –
na, wie breit und wie hoch wird es sein?
* *ca* 0,5 mm